709

~~679~~. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用, II. (N. Kryloff ト N. Bogolioubofff ノ論文紹介並ニ Fréchet ノ定理ノ擴張)

吉田　耕作 (阪大)

前談話 (676) ニ於テ $K(x, y) \geq 0$ 且ツ $\int_{\Omega} K(x, y)\,dy \equiv 1$ ナル如キ核 $K(x, y)$ ヲ n 回反復 (iterate) シタ核 $K^{(n)}(x, y)$ ノ $n \to \infty$ ニ於ケル asymtotic ナ状態ニ関スル M. Fréchet ノ論文ヲ紹介シタ。Kryloff ト Bogolioubofff ノ論文 (Bull. Soc. Math. France 64 (1936))

ハ上ノ Fréchet ノ結果ニ鮮ヤカナ確率論的解釈ヲ與ヘテヰル。之ハ von Neumann ニヨル, compact ナ空間ニ於ケル incompressible ナ steady flow ヲ ergodic ナ部分ニ分ツ定理(1) ニ對比サセルト面白イ。

次ニ近着ノ C. Visser ノ論文 (Proc. Amsterdam Acad. XLI, 5 (1938)) ノ idea ヲ使フト, 上ノ Fréchet ノ結果が, Hilbert 空間ノ線型 operator ノ反覆ノ議論トシテノ一ツノ擴張ヲ與ヘラレルコトヲ示シタイ。

§3. Kryloff ト Bogolioubof ノ結果

1. 準備. 彼等ノ考ヘノ出發点ハ極メテ簡單デアル。即チ $\varphi(x)$ が

$$(9)\quad \varphi(x)=\int_R K(y,x)\,\varphi(y)\,dy$$

ヲ滿足スレバ絶対値 $|\varphi(x)|$ モ亦 (9) ヲ滿足スルト云フノデアル。証明ニハ. 假定 $K(y,x)\geqq 0$ ニヨリ

$$|\varphi(x)|\leqq \int_R K(y,x)|\varphi(y)|\,dy \quad \text{即チ} \quad \int_R K(y,x)|\varphi(y)|\,dy-|\varphi(x)|\geqq 0$$

ヲ得, 次ニ假定 $\int_R K(y,x)\,dx\equiv 1$ ニヨリ積分シテ

$$\int_R\int_R K(y,x)|\varphi(y)|\,dy\,dx-\int_R|\varphi(x)|\,dx=0$$ ヲ得ルコトニ注

(1) von Neumann: Ann. of Math. 33, 3 (1932).
N. Kryloff ト N. Bogolioubof ノ論文 (Ann. of Math. 38, 1 (1937)) ノ方が証明がワカリ易イシ且ツ precise デアル。

意スル。但シ，以上ナラ $|\varphi(x)|$ ガ (9) ヲ満足スルコトヲ云フタメニ，<u>核 $K(x, y)$ ノ連続性</u>ヲ假定スルノデアル。[1]

偖ヲ上ロテ，(9) ノ解全体ヲ $\mathfrak{E}$ トスルト

$\mathfrak{E}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル連続且ツ積分可能ナ函数ノ線型集合デ i) 有限次元，[2] 且ツ ii) $\varphi(x) \in \mathfrak{E}$ ナラバ $|\varphi(x)| \in \mathfrak{E}$ ヲ満足スル。

Lemma 4. $\mathfrak{E}$ カラ有限コノ一次独立ナ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\cdots, \varphi_m(x)$ ヲ撰ビ

(10) $\varphi_i(x) \geqq 0$ for $i = 1, 2, \cdots\cdots, m$; $\varphi_i(x)\,\varphi_j(x) \equiv 0$ for $i \neq j$ 且ツ $\mathfrak{E}$ ニ属スル任意ノ <u>positive</u> ナ函数 $\varphi(x)$ ハ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\cdots, \varphi_m(x)$ ノ一次結合[3] トシテ表ハサレル如クナシ得ル。

証明。 $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathfrak{E}$ ヲ一次独立トスルト，ii) ニヨリ $\rho_1(x) = |\psi_1(x) - \psi_2(x)| + \psi_1(x) - \psi_2(x)$，$\rho_2(x) = |\psi_1(x) - \psi_2(x)| + \psi_2(x) - \psi_1(x)$ ハ一次独立且ツ (10) ヲ満足スル。若シ $\mathfrak{E}$ ノ任意ノ *positive* ナ函数ガ $\rho_1(x), \rho_2(x)$ ト一次関聯ナラバ *Lemma* ハ証明出来タコトニナル。($\varphi_1 = \rho_1$,

---

(1) *Fréchet* ノ假定ノ他ニ，此ノ為メニハ $\mathfrak{R}$ ガ *topological space* トシテヲカネバナラヌ。此ノ際ハ核ト共ニ固有函数 $\varphi(x)$ モ勿論連続ニナル。

(2) 一次独立ナモノノ個数有限ナコト。

(3) 勿論 (10) ニヨリ，其ノ際ノ係数ハ *non negative* トナル筈。

$\varphi_2=\rho_2$ トスレバヨイ)。若シ ρ_1, ρ_2 ト一次独立ナ $\psi(x)$ ガ存在シタトスレバ

$$\sigma_1(x)=|\rho_1(x)-\psi(x)|+\rho_1(x)-\psi(x)$$

$$\sigma_2(x)=|\rho_2(x)-\sigma_2'(x)|+\rho_2(x)-\sigma_2'(x)$$

$$\left(\text{但シ } \sigma_2'(x)=|\rho_2(x)-\psi(x)|+\psi(x)-\rho_1(x)\right)$$

$$\sigma_3(x)=|\rho_2(x)-\sigma_2'(x)|+\sigma_2'(x)-\rho_2(x)$$

ハ一次独立且ツ (10) ノ満足スル。何者, $\sigma_2(x)\sigma_3(x)\equiv 0$ ハ明カダカラ, $\sigma_1(x_0)>0$ ナル点 x_0 デハ $\sigma_2(x_0)=0$, $\sigma_3(x_0)=0$ ナルコトヲ云フトヨイ。偖テ $\sigma_1(x_0)>0$ カラ $\rho_1(x_0)-\psi(x_0)>0$。従ッテ $\sigma_2'(x_0)=0$ 及ビ $\rho_1(x_0)>0$ ($\psi(x)\geqq 0$ ニヨル) ヲ得レ故 $\rho_2(x_0)=0$, $\sigma_2(x_0)=0$, $\sigma_3(x_0)=0$.

同様ノ論法ヲ繰返セバ (*induction*), i) ニヨリ $\mathfrak{E}$ ノ *positive* ナ函数全体ハ有限次元ノ線型集合(1)ヲ作ルカラ, *Lemma* ノ証明ガ得ラレル。——以上——

以下一般性ヲ失ハズニ, 上ノ $\varphi_i(x)$ ハ全テ $\int_R \varphi_i(x)\,dx=1$ ト仮定シテ進ム。偖テ $K^{(n+1)}(z,x)=\int_R K^{(n)}(z,y)K(y,x)\,dy$ ナル定義ニヨリ,

$$l_1(z,x)=\lim_{n\to\infty}\left\{K(z,x)+K^{(2)}(z,x)+\cdots\cdots+K^{(n)}(z,x)\right\}\Big/n \quad (2)$$

---

(1) 係数 *non negative* ナ一次結合ニ對シテ

(2) 測度 R = 有限, $\overline{\lim_{x,y}}|K(y,x)|$ = 有限ノ仮定ノモトニ, 一様収斂ナルコトガ *Fréchet* ノ結果(前談話)デアッタ。

ハ，z ヲ fix シタトキニ x ノ函数トシテ (9) ヲ満足スル。且ツ $K(z,x) \geqq 0$，$\int_R K(z,x)\,dx \equiv 1$ ニヨッテ

$$(11) \quad l_1(z,x) \geqq 0, \quad \int_R l_1(z,x)\,dx \equiv 1$$

故ニ Lemma 4 及ビ $\int_R \varphi_i(x)\,dx = 1$ カラ

$$(12) \quad l_1(z,x) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(z)\varphi_i(x), \quad \sum_{i=1}^{m} \psi_i(z) \equiv 1,$$

$$\psi_i(z) \geqq 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, m.$$

ヲ得ル。以上デ準備ヲ終リ

2. 結論．$\varphi_i(x) > 0$ ナル x ノ集合ヲ R_i トスルト Lemma 4 ニヨリ R_i ト R_j トハ互ニ共通点ヲ持タヌ ($i \neq j$ ナラバ)。$\varphi_i(x) = \int_R K(y,x)\varphi_i(y)\,dy$ カラ，全テノ n ニ対シ $\varphi_i(x) = \int_R K^{(n)}(y,x)\varphi_i(y)\,dy$ ヲ得ル。故ニ $\varphi_i(x) = \int_{R_i} K^{(n)}(y,x)\varphi_i(y)\,dy$．従ッテ全テノ i, n ニ対シ

$$K^{(n)}(y,x) = 0 \quad \text{for} \quad y \in R_i, \quad x \in R - R_i.$$

故ニ

I. 最初 R_i ニアッタ点 y ハ，任意ノ n ニ対シ，n 単位時間後ニ $R - R_i$ ニハ確実ニ移ラナイ。

次ニ (10), (11), (12) ニヨッテ $1 = \int_R l_1(z,x)\,dx$

$$= \int_{\sum_{i=1}^{m} R_i} l_1(z,x)\,dx$$

ヲ得ルカラ

II. 任意ノ点 x ガ n 単位時間後ニ $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_m$ ノ何レカニ移ルコトハ $n\to\infty$ ノトキ[1] 確實デアル。

之レハ $\sum_{i=1}^{m} R_i = R$ ナラバ trivial デアルガ

III 若シ $m\geqq 2$ 且ツ R ガ連結集合デアレバ $\sum_{i=1}^{m} R_i \neq R$ デアル。

證明. $m\geqq 2$ トシ $R=\sum_{i=1}^{m} R_i$ トセヨ。$R^1=R_1$, $R^2=\sum_{i=2}^{m} R_i$ トスレバ $R=R^1+R^2$, $\prod_{i=1}^{2} R^i=$ 空集合トナル。R_i ハ連續實函數 $\varphi_i(x)$ ガ >0 トナル x ノ集合ダカラ開集合. 從ッテ R ハ互ニ共通点ヲモタヌ開集合 R^1, R^2 ノ和トナルカラ R ノ連結ト云フ假定ニ反スル。

§4. Fréchet ノ結果ノ一ツノ擴張

定理. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ線型 operator K ガ vollstetig 且ツ

(13) $\|K^n\cdot x\|\leqq C\|x\|$ for any x and for any n.[2]

ヲ満足スレバ operator $K_n=\dfrac{K+K^2+\cdots\cdots+K^n}{n}$ ハ $\mathfrak{H}$ ノ或ル operator K' ニ一様收斂スル。[3]

---

(1) 但シ Césaro 平均ノ意味デ (前談話ヲミラレタイ)

(2) $K^2\cdot x=K\cdot(K\cdot x)$, $\cdots\cdots$, $K^n\cdot x=K\cdot(K^{n-1}\cdot x)$. C ハ正常數. $\|\ \|$ ハ $\mathfrak{H}$ デ絶對値 (Norm).

(3) 全テノ $x\in\mathfrak{H}$, $\|x\|\leqq 1$ ニ於テ一様ニ $\lim_{n\to\infty}\|K'\cdot x-K_n\cdot x\|=0$.

(注意) Kガ vollstetig トイフノハ，絶對値有界ノ点集合ヲ絶對値ノ意味デ compact ナ集合ニ寫スコトヲ意味スル。線型積分 operator ハ vollstetig ナコトハ良ク知ラレテヰルカラ，上定理ガ前談話ニ紹介シタ Frechet ノ結果ヲ $\mathfrak{H}$ ニ拡張シタモノニナッテヰルコトハ明カデアル。

以下証明ノタメノ Lemmas ヲ述ベル。

Lemma 1. vollstetig ナ K ノ固有値ハ複素数有限平面上デ孤立点集合ヲナシ，且ツソレラノ固有値ノ multiplicity ハ全テ有限デアル（良ク知ラレタ F. Riesz ノ定理）。

Lemma 2. (13)ヲ満足スル K ハ其絶対値 1 ヨリ大ナル固有値ヲモタナイ。

証. $|\lambda|>1$, $K\cdot x=\lambda\cdot x$, $x\neq 0$ トセヨ。之レカラ $K^n\cdot x=\lambda^n\cdot x$ ヲ得ルカラ $\|K^n\cdot x\|=|\lambda|^n\|x\|$ トナッテ (13) ニ矛盾スル。

Lemma 3. K ノ絶対値 1 ノ固有値ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$[1] トスレバ K ノ adjoint K^* ノ絶対値 1 ノ固有値ハ $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \cdots\cdots, \overline{\lambda}_m$ デアル。

証明. K^* ハ全テノ $x, y\in\mathfrak{H}$ ニ對シ $(K\cdot x, y)=(x, K^*\cdot y)$[2] デ定義サレ，又良ク知ラレタ如ク (13) ハ $\|(K^n\cdot x, y)\|\leqq C\|x\|\|y\|$ ト同等ダカラ，K^* モ亦 (13) ヲ満足スル。仍テ $\overline{\lambda}_1$,

---

(1) m ノ有限ナコトハ Lemma 1.

(2) (x, y) ハ inner product.

ガ K^* ノ固有値ナラズトスレバ (B) ヲ満足スル $\frac{K^*}{\lambda_1}=M$ ハ 1 ヲ固有値トシナイ。然ラバ任意ノ $x \in \mathfrak{H}$ ニ對シ

$$y_n = \frac{M \cdot x + M^2 \cdot x + \cdots\cdots + M^n \cdot x}{n}$$ ハ 0 ニ弱收斂[1]スル。

何者, (13) ニヨリ $\|y_n\| \leqq C\|x\|$ ヲ得ルカラ絶對値有界ナ $\{y_n\}$ ガ若シ 0 ニ弱收斂シナケレバ, $\{y_n\}$ ハ $z \neq 0$ ニ弱收斂スル部分列 $\{y_{n_i}\}$ ヲ含ム。[2] 然シテ (13) ニヨリ

$$\|M \cdot y_{n_i} - y_{n_i}\| \leqq \frac{2C}{n_i}\|x\|$$ ガ $n_i \to \infty$ ノトキ 0 ニ收斂スルカラ M, M^* ノ連続性（有界性）ニヨツテ $M \cdot z = z$ ナル矛盾ヲ得ルカラ。

偖テ任意ノ $x, z \in \mathfrak{H}$ ニ對シ

$$\left(\frac{M \cdot x + M^2 \cdot x + \cdots\cdots + M^n \cdot x}{n}, z\right) = \left(x, \frac{M^* \cdot z + M^{*2} \cdot z + \cdots\cdots + M^{*n} \cdot z}{n}\right)$$

ガ成立スルカラ, 上述ニヨリ左辺従ツテ右辺ガ 0 ニ收斂スル。所ガ $M^* = \frac{K}{\lambda_1}$ ダカラ $z \neq 0$, $M^* \cdot z = z$ ナル如キ z ガ存在スル。斯ル z ニ對シテハ右辺ハ (x, z). 任意ノ x ニ對シ $(x, z) = 0$ ト云フコトハ $z \neq 0$ ニ矛盾スル。

ヨツテ K ガ (13) ヲ満足スレバ, λ_1 ($|\lambda_1| = 1$) ガ K ノ固有値ナルトキ K^* ハ $\overline{\lambda_1}$ ヲ固有値トスル。$(K^*)^* = K$ ニ注意スレバ *symmetry* カラ *Lemma* ノ証明ヲ得ル。

---

(1) 任意ノ $z \in \mathfrak{H}$ ニ對シ $\lim_{n \to \infty}(y_n, z) = 0$ ナルコト。

(2) $\mathfrak{H}$ ニ於ケル有界点集合ハ $\mathfrak{H}$ ノ元ニ弱收斂スル部分列ヲ含ム。

Lemma 4. $K\cdot x=\lambda_i\cdot x$ ヲ満足スル x 全体ヲ $\mathfrak{C}_i$ トスル。

$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{C}_m$ ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ ノ全テノ点ニ直交スル[1]点全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{M}_1$ トスル。K^* ニツイテモ同様ニ $K^*\cdot x=\overline{\lambda}_i x$ ノ解全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{C}_i^*$, $\mathfrak{C}_1^*$ 乃至 $\mathfrak{C}_m^*$ ノ張ル線型閉集合 $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}$ ニ直交スル点全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{M}_1^*$ トスル。

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}^*\oplus\mathfrak{M}_1^*,\quad \mathfrak{M}=\mathfrak{C}_1\dotplus\cdots\cdots\dotplus\mathfrak{C}_m,$$

$$\mathfrak{M}^*=\mathfrak{C}_1^*\dotplus\cdots\cdots\dotplus\mathfrak{C}_m^*.$$

然ラバ $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{M}_1^*$, $\mathfrak{M}^*$ ト $\mathfrak{M}_1$ トハ 0 以外ニ共通点ナイ。

証明. 任意ノ x, y ニ対シ,

$$(K\cdot x-\lambda_1 x, y)=(x, K^*\cdot y)-(x, \overline{\lambda}_1 y)=(x, K^*\cdot y-\overline{\lambda}_1 y).$$

ヨッテ $x\in\mathfrak{C}_1$ ナラ上式 0 トナルカラ $(K^*y-\overline{\lambda}_1 y)\perp\mathfrak{C}_1$. 逆ニ x ガ $K^*y-\overline{\lambda}_1 y$ ノ形ノ全テノ点ト直交スレバ上式カラ $K\cdot x-\lambda_1 x$ ハ全テノ y ト直交シ從ッテ $K\cdot x=\lambda_1 x$ 即チ $x\in\mathfrak{C}_1$. 故ニ $\mathfrak{C}_1$ ハ <u>$K^*-\overline{\lambda}_1 E$</u> ($E$ ハ単位変換) ノ <u>値域</u> (*Wertvorrat*) ニ直交スル点全体ノ集合ニ一致スル。

故ニ $\mathfrak{M}_1$ ハ $(K^*-\overline{\lambda}_i E)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, m)$ ノ値域ノ共通部分ニナル。同ジク $\mathfrak{M}_1^*$ ハ $(K-\lambda_i E)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, m)$ ノ値域ノ共通部分ニナル。

今若シ $x\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_1^*$ トスレバ, $x\in\mathfrak{M}$ カラ $x=x_1+x_2+\cdots$

---

[1] x ガ $\mathfrak{M}$ ニ直交スルトハ $(x, y)=0$ *for all* $y\in\mathfrak{M}$ ノ意味.

$\cdots\cdots+x_m$, $x_i\in\mathfrak{C}_i$ ト unique ニ表ハサレル[1] $x_1=0$ ナコトヲ云フニハ $x\in\mathfrak{M}_1^*$ カラ $x=(K-\lambda_1E)\cdot y$ ノ形ニ注意スルト

$$\frac{K}{\lambda_1}\cdot x=x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2+\cdots\cdots+\frac{\lambda_m}{\lambda_1}x_m=\frac{K^2}{\lambda_1}\cdot y-K\cdot y$$

$$\left(\frac{K}{\lambda_1}\right)^2\cdot x=x_1+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2x_2+\cdots\cdots+\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^2x_m=\frac{K^3}{\lambda_1^2}\cdot y-\frac{K^2}{\lambda_1}\cdot y$$

$$\vdots$$

ノ算術平均ヲトツテ

$$x_1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2+\cdots\cdots+\frac{1}{W}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k x_m$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{K^{n+1}}{\lambda_1^{\,n}}\cdot y-K\cdot y\right\}$$

ヲ得, (13) ト $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$ $|\lambda_i|=1$ ニヨツテ, $n\to\infty$ ノトキ $x_1=0$ トナルコトカラワカル。

同様ノ議論ヲクリカヘシ結局 $x\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_1^*$ ナラ $x=0$。同ジク $x\in\mathfrak{M}^*\cdot\mathfrak{M}_1$ ナラ $x=0$

Lemma 5. $x\in\mathfrak{M}_1^*$ ナラバ $\dfrac{K\cdot x+\cdots\cdots+K^n\cdot x}{n}$ ハ一様ニ0ニ收斂スル。

證明。任意ノ $y\in\mathfrak{H}$ ニ對シ $K(K-\lambda_iE)\cdot y=(K-\lambda_iE)(K\cdot y)$ ダカラ, K ハ $\mathfrak{M}_1^*$ ヲ $\mathfrak{M}_1^*$ 内ニ寫ス。K ヲ Hilbert 空間 $\mathfrak{M}_1^*$ デノ operator ト考ヘルト vollstetig 且ツ (13) ヲ滿足スル。*Lemma* 4 ニヨリ K ハ $\mathfrak{M}_1^*$ デハ絶對

---

(1) $\mathfrak{C}_i$ ハ互ニ直交ハシナイケモシレヌガ互ニ一次獨立.

値1ノ固有値モタヌ。從ツテ $(E-\lambda K)$ ナル $\mathfrak{M}_1^*$ デノ voll-stetig ナ operator ガ、Lemma 1, 2 ヲ用ヒ
$|\lambda|\leqq 1+\delta$, $\delta>0$ デ固有値モタヌ如キ $\delta>0$ ガ存在スル。
ヨッテ $(E-\lambda K)$ ノ resolvent $(E-\lambda K)^{-1}$ ハ
$|\lambda|\leqq 1+\delta$ デ λ ノ正則函数トナル。[1] ヨッテ $(E-\lambda K)^{-1}$
$=E+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\cdots\cdots$ ト $|\lambda|\leqq 1+\delta$ デ展開デキル。
$|\lambda|$ ガ充分小サイ所デハ $(E-\lambda K)^{-1}=E+\lambda K+\lambda^2K^2+\cdots\cdots$
ダカラ $A_i=K^i$。

ヨッテ Cauchy ノ積分表示ヨリ

$$\|K^i\|\leqq \frac{D}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^i},\quad D=\underset{|\lambda|\leqq 1+\frac{\delta}{2}}{\mathrm{O.\,G.}}\|(E-\lambda K)^{-1}\|$$

ヲ得ルカラ。[2]

Lemma 6. $\mathfrak{H}$ ノ $\mathfrak{M}^*$ ヘノ projection ヲ Q トスルト Q ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}^*$ ヘ1對1ニ寫像スル。

證明: $x\in\mathfrak{M}$, $Q\cdot x=0$ トスレバ $x\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_1^*$ トナリ ($\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}_1^*$ ニヨル) Lemma 4 カラ $x=0$.
コレハ Q ガ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}^*$ ノ中ニ schlicht ニ寫スコトヲ示ス。若シ $Q\cdot\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^*$ ナラズトスレバ、或ル $y\neq 0$ ($y\in\mathfrak{M}^*$) ニ對シ $Q\cdot\mathfrak{M}$ ガ直交スル。即チ $(y, Q\cdot x)=0$ for $x\in\mathfrak{M}$, Q ハ projection ダカラ $(y, Q\cdot x)$

---

(1) $(E-\lambda K)$ ノ resolvent ガ λ ノ有理型函数トナルコト且ツ $(E-\lambda K)$ ノ固有値以外デハ正則ナコトハ良ク知ラレテル。

(2) $\|K\|=\underset{\substack{x\in\mathfrak{H}\\ \|x\|\leqq 1}}{\mathrm{O.\,G.}}\|K\cdot x\|$

$=(Q\cdot y, x)=(y, x)$ ヲ得ルカラ $y\in\mathfrak{M}_1$,（$\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}_1$ ニヨル）。従ッテ $y\in\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}^*$ ニヨリ Lemma 4 カラ $y=0$ ナル矛盾ヲ得ル。

ヨッテ Q ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}^*$ ニ一對一ニ寫ス。

定理ノ証明. Q ニヨル $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}^*$ ナル寫像ノ逆寫像 P ガ存在スル（Lemma 6）。任意ノ $x\in\mathfrak{H}$ ヲ

$$x=PQ\cdot x+(x-PQ\cdot x)=y_1+y_2$$

ト分解スレバ，$y\in\mathfrak{M}$, $y_2\in\mathfrak{M}_1^*$ トナル。何者，y_1 ハ定義カラ明ニ $\in\mathfrak{M}$. $y_2\in\mathfrak{M}_1^*$ 云フニハ $Q\cdot y_2=0$ 云フトヨイガ之レモ $Q\cdot y_2=Q\cdot x-QPQ\cdot x=Q\cdot x-Q\cdot x=0$ デ明カ。

Lemma 5 ニヨリ $\dfrac{K\cdot y_2+\cdots\cdots+K^n\cdot y_2}{n}$ ハ 0 ニ一様收斂スルカラ，$y_1=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m$, $x_i\in\mathfrak{C}_i$ トシタトキ $\dfrac{K\cdot y_1+\cdots\cdots+K^n\cdot y_1}{n}$ ガ x_1 ニ一様收斂スルコトヲ云フトヨイ。但シ $\lambda_1=1$ ト假定スル。ソコデ $\mathfrak{C}_1=0$ ナラバ，即チ 1 ガ K ノ固有値ナラズバ $x_1=0$ トノ convention ヲ用フルコトニシテ。

從ッテ $K\cdot y_1=x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_mx_m$, $K^2\cdot y_1=x_1+\lambda_2^2x_2+\cdots\cdots+\lambda_mx_m$, $\cdots\cdots$ ニヨリ

$$\frac{K\cdot y_1+\cdots\cdots+K^n\cdot y_1}{n}=x_1-x_2\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_2^k}{n}+\cdots\cdots+x_m\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_m^k}{n}.$$

$\lambda_i\neq1$ 且ッ $|\lambda_i|=1$ ナルコト及ビ $\mathfrak{C}_i$ ガ全テ有限次元且ッ $\mathfrak{C}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{C}_m$ ガ互ニ一次独立ナルコトカラ

$\dfrac{K\cdot y_1+\cdots\cdots+K^n\cdot y_1}{n}$ ノ x_1 ニ一様收斂スルコトヲ結論シ得ル。 ——以上——

§5. Visser ノ結果

前章ハ今少シ簡單ニヤレルノデスガ，アソコノ Lemmas ヲ使ッテ Visser ノ結果ヲ紹介シタカッタノデ，ダラダラシテ了ッタ次第デス。

Visser ノ定理. K ヲ $\mathfrak{H}$ ノ線型 operator デ且ツ (13) ヲ満足スルモノトスレバ，任意ノ x ニ對シ $\dfrac{K\cdot x+K^2\cdot x+\cdots\cdots+K^n\cdot x}{n}$ ガ弱收斂スル。（K ノ vollstetig ヲ假定セヌ）

證明. 前章デ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ ヲ夫々 $K\cdot x=x$, $K^*\cdot x=x$ ヲ満足スル x ノ張ル線型閉集合トスレバ $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}^*\oplus\mathfrak{M}_1^*$ デ $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_1^*=\mathfrak{M}^*\cdot\mathfrak{M}_1=0$（Lemma 4 ト同様）。Lemma 6 ガ同ジク成立スルカラ任意ノ $x\in\mathfrak{H}$ ハ x_1+x_2 ($x_1\in\mathfrak{M}$, $x_2\in\mathfrak{M}_1^*$) ト分解デキル。Lemma 5 ト同ジク K ハ $\mathfrak{M}_1^*$ デハ 1 ヲ固有値トセヌカラ，Lemma 3 ノ證明ノ中ニ示シタ如クシテ $\dfrac{K\cdot x_2+\cdots\cdots+K^n\cdot x_2}{n}$ ハ 0 ニ弱收斂スル，一方 $\dfrac{K\cdot x_1+\cdots\cdots+K^n\cdot x_1}{n}=x_1$ by $x_1\in\mathfrak{M}$ ダカラ定理ガ証サレタ。

注意 若シ K ガ vollstetig ナラ上ノ收斂ハ強收斂トナ[1]

(1) 絶對値ノ意味ノ收斂